微分法とその応用

例題 2　微分の計算／対数微分法，媒介変数表示，陰関数

(1)　別解

$x^{3x}=e^{\log x^{3x}}=e^{3x\log x}$ より，

$$y'=(3x\log x)'e^{3x\log x}$$
$$=3\left(1\cdot\frac{1}{x}+\log x\right)x^{3x}$$
$$=3(1+\log x)x^{3x}$$

例題 3　定義，公式の証明

(3)　補足

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+\cdots+x^{n-2}(x+h)+x^{n-1}\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}(x+h)^{n-k}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}(x+h)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}x^{n-1}$$
$$=nx^{n-1}$$

例題 9　最大・最小／図形への応用

（イ）補足

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AQ}^2+\mathrm{AP}^2-2\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AP}\cos\angle\mathrm{PAQ}$$
$$=\mathrm{AQ}^2+\frac{1}{4}-\mathrm{AQ}\cos\angle\mathrm{PAQ}$$

より，任意の Q に対し PQ が最小となるのは $\angle\mathrm{PAQ}=0$ のときで，

このとき $\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AQ}^2-\mathrm{AQ}+\frac{1}{4}=\left(\mathrm{AQ}-\frac{1}{2}\right)^2$ だから，AQ の最小値を考えればよい。

例題 14　法線と曲率／曲がり具合

曲率円（接触円）

曲線上に適当に点 P，P’，P” の 3 点をとって描いた円のうち，
P’と P”を P に無限に近づけたときできる極限の円を「点 P における曲率円（接触円）」という。
点 P における曲率円と曲線は点 P においてぴったりと一致する。
また，曲率円の中心を曲率中心，半径を曲率半径，半径の逆数を曲率という。

2 つの平面曲線の接触の仕方による分類

2 つの平面曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=x_0$ で

共有点をもつための必要十分条件は，

$f(x_0)=g(x_0)$ である。

接するための必要十分条件は，

$f(x_0)=g(x_0)$ かつ共有点において共通接線をもつこと，
すなわち $f'(x_0)=g'(x_0)$ が成り立つこと。

曲線の形が一致するための必要十分条件は，

$f(x_0)=g(x_0)$ かつ $f'(x_0)=g'(x_0)$ かつ
共有点において 2 曲線の形つまり接線の傾きの変化の様子が一致すること，
すなわち $f''(x_0)=g''(x_0)$ が成り立つこと。

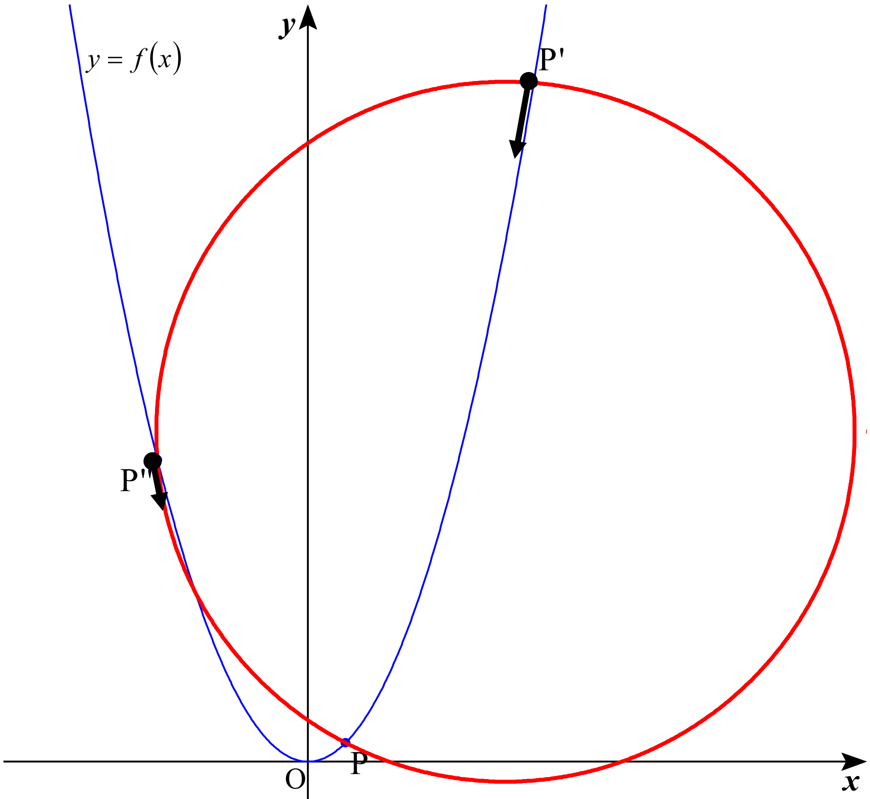
である。

$f(x_0)=g(x_0)$ だけが成り立つ場合
2 曲線は $x=x_0$ で 0 位の接触をしているという。

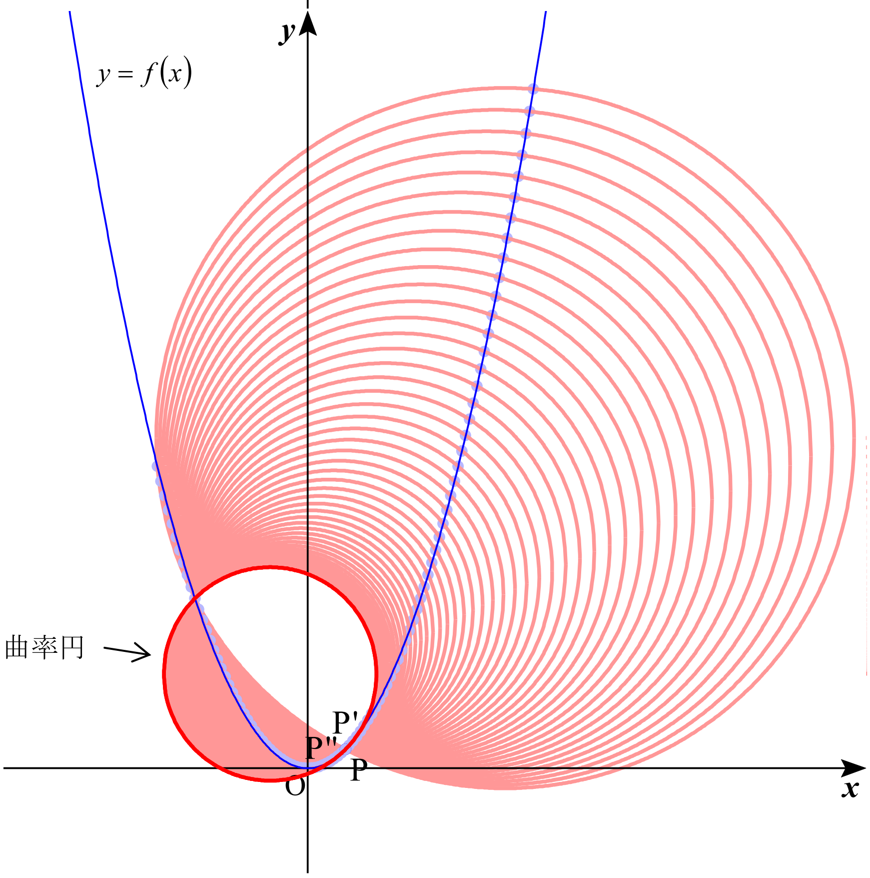
$f(x_0)=g(x_0)$ かつ $f'(x_0)=g'(x_0)$ まで成り立つ場合
2 曲線は $x=x_0$ で 1 位の接触をしているという。

$f(x_0)=g(x_0)$ かつ $f'(x_0)=g'(x_0)$ かつ $f''(x_0)=g''(x_0)$ まで成り立つ場合
2 曲線は $x=x_0$ で 2 位の接触をしているという。

高校で学習するのは 1 位の接触までである。



y
$y = f(x)$
P'
P''
O
P
x



y
$y = f(x)$
曲率円
P'
P''
O
P
x

曲率円の中心と半径の求め方

方法 1

点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$の曲率円の中心を $\mathrm{O}(\alpha,\ \beta)$，OP＝$r$ とすると，

その曲率円の方程式は$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$　$\left(r^2=(p-\alpha)^2+(f(p)-\beta)^2\right)$

ここで, 点 P の接線の法線と曲線C 上の点 P 以外の点 $\mathrm{Q}(a,\ f(a))$の接線の法線の交点の x 座標を $h(a)$とすると，$\alpha=\lim_{a\to p} h(a)$

これをどちらかの法線の方程式に代入することにより，β が得られる。

方法 2

$y=f(x)$上の点 $\mathrm{P}(x_0, f(x_0))$を通る円が曲率円であるための必要十分条件は,

点 P において $y=f(x)$と 2 位の接触をしていることである。

つまり，曲率円の方程式を $y=g(x)$で表したとき,

$f(x_0)=g(x_0)$かつ $f'(x_0)=g'(x_0)$かつ $f''(x_0)=g''(x_0)$が成り立つことである。

このことを使って，曲率円を求めてみる。

まず,

$y=f(x)$上の点 P の座標を $\mathrm{P}(x_0, f(x_0))$,

点 P における曲率円の方程式を$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$　・・・①

とおく。

式①を x で微分すると,

$2(x-\alpha)+2(y-\beta)\dfrac{dy}{dx}=0$ より，$x-\alpha+(y-\beta)\dfrac{dy}{dx}=0$　・・・②

式②をさらに x で微分すると,

$1+\left\{\dfrac{d(y-\beta)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right\}\cdot\dfrac{dy}{dx}+(y-\beta)\left\{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right\}=0$ より,

$1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$　・・・③

ここで，見た目をスッキリさせる目的で，$\dfrac{dy}{dx}=y'$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''$ と表すことにする。

すると，②，③は，それぞれ

$x-\alpha+(y-\beta)y'=0$　・・・④

$1+y'^2+(y-\beta)y''=0$　・・・⑤

となる。

よって，⑤より，$y-\beta=-\dfrac{1+y'^2}{y''}$　・・・⑥

④と⑥より，$x-\alpha=\dfrac{1+y'^2}{y''}\cdot y'$　・・・⑦

①，⑥，⑦より，$r^2=\dfrac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$　$\therefore r=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$　・・・⑧

$y=f(x)$ と点 P における曲率円 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ は,
点 P において 2 位の接触をしているから,

曲率円を x で 1 回微分, 2 回微分したときの点 P における値をそれぞれ $y_0{}'$, $y_0{}''$ とすると,

$(x_0,\ y_0)=(x_0,\ f(x_0))$, $(x_0,\ y_0')=(x_0,\ f'(x_0))$, $(x_0,\ y_0'')=(x_0,\ f''(x_0))$　・・・⑨　が成り立つ。
よって，⑥，⑦，⑨より，

$$\alpha=x_0-\frac{1+y_0'^2}{y_0''}\cdot y_0'=x_0-\frac{1+\{f'(x_0)\}^2}{f''(x_0)}\cdot f'(x_0)$$

$$\beta=y_0+\frac{1+y_0'^2}{y_0''}=f(x_0)+\frac{1+\{f'(x_0)\}^2}{f''(x_0)}$$

ゆえに，曲率円の中心 $(\alpha,\beta)=\left(x_0-\dfrac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}f'(x_0),\ f(x_0)+\dfrac{1+f'(x_0)^2}{f''(x_0)}\right)$

また，曲率円の半径，すなわち曲率半径は，⑧，⑨より，

$$r=\frac{(1+f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}$$

これより，曲率は $\dfrac{1}{r}=\dfrac{|f''(x_0)|}{(1+f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$

曲率円の例：楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の曲率円

$$y=f(x)=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ より，

$$2b^2x+2a^2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}=\mp\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$2b^2+2a^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2a^2y\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ より，

$$b^2+\frac{b^2x^2}{a^2-x^2}+a^2\cdot\left(\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\therefore \frac{b}{a^2-x^2}\pm\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\mp\frac{ab}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

以上より，

$$f(x)=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad f'(x)=\mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad f''(x)=\mp\frac{ab}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

よって，

$$(\alpha,\beta)=\left(x-\frac{1+\frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}}{\frac{ab}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}\frac{bx}{a\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ \pm\frac{b\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{a}\mp\frac{1+\frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}}{\frac{ab}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3,\mp\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^3b}\right)$$

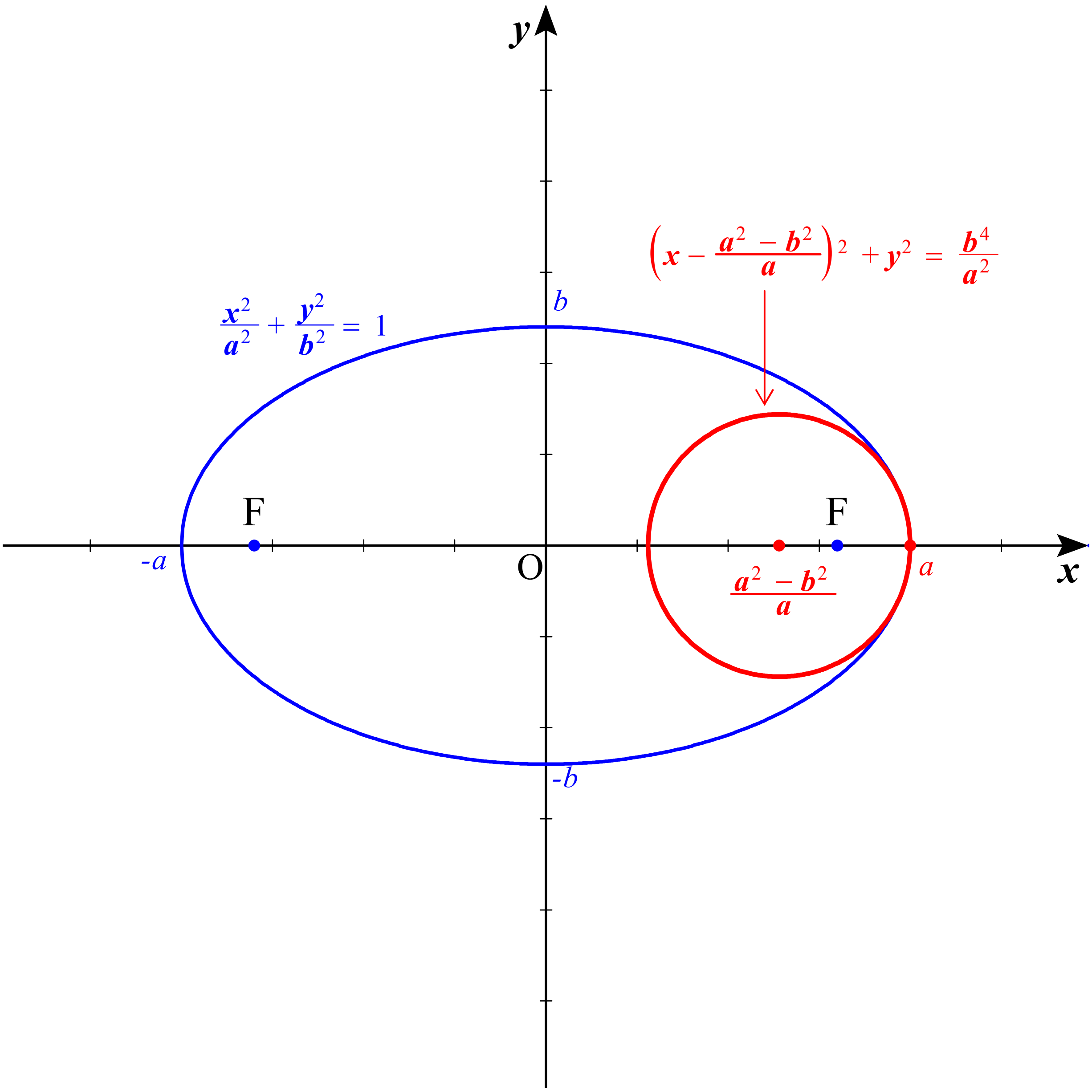
$$r=\frac{\left\{1+\frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{ab}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{\left\{a^4-\left(a^2-b^2\right)x^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の曲率円のまとめ

曲率中心 $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^4}x^3, \mp\dfrac{(a^2-b^2)(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3b}\right)$

曲率半径 $r=\dfrac{\{a^4-(a^2-b^2)x^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$

たとえば，$(a,0)$ における曲率円の中心 $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a},0\right)$，曲率円の半径＝ $a-\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{b^2}{a}$



例題 16　不等式への応用／凸性の利用

（イ）

$f(x)=\log x-\left\{\log a+\dfrac{x-a}{b-a}(\log b-\log a)\right\}$ とおくと，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\log b-\log a}{b-a}$ から $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ であるから，

$y=f(x)$ は上に凸のグラフである。

これと $f(a)=f(b)=0$ より， $a\leq x\leq b$ のとき $f(x)\geq 0$

すなわち $\log x\geq \log a+\dfrac{x-a}{b-a}(\log b-\log a)$